SAI.Fethi	Les suites réelles	Novembre 2007

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} \end{cases}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N} : 1 \le u_n \prec \sqrt{2}$.
2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3) Soit (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

   b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

4) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

   Calculer S_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 2

Soit a et b deux réels tels que : 0<a<b. (u) et (v) deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = a \quad et \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = 2\frac{u_n \times v_n}{u_n + v_n} \quad et \quad v_{n+1} \quad \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$.
2) a) Montrer que (u) est croissante.

   b) Montrer que (v) est décroissante.
3) Montrer que les suites (u) et (v) sont convergentes.

   (On note l et l' leurs limites respectives).
4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < v_n - u_n < (\frac{1}{2})^n (b - a)$.

   c) Déduire que l=l'.
5) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n v_n = ab$ et on déduire que $l = \sqrt{ab}$.