République tunisienne
Ministère de l'éducation et de la formation

Devoir de synthèse N° 3 en mathématiques	**Section : 4ème Sc-Exp**
	Date : 08/05/2009
	Durée : 3 heures

EXERCICE N°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule de quatre réponses est exacte. On utilisera pour répondre la feuille annexe qui sera rendue avec la copie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de la réponse vaut 0 point.

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est: $p\left([0,t[\right) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2500 heures est:

A/ $e^{-\frac{2500}{2000}}$ B/ $e^{\frac{5}{4}}$ C/ $1 - e^{-\frac{2500}{2000}}$ D/ $e^{-\frac{2000}{2500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule: $E = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$

 a) L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ est égale à:

A/ $\lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t}$ B/ $-te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$ C/ $\lambda t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda$

D/ $te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$

 b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures est:

A/ 3500 B/ 2000 C/ 2531,24 D/ 3000

EXERCICE N°2 (4 points)

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M, 50 % des clients choisissent la destination A, 30 % des clients choisissent la destination G et 20 % des clients choisissent la destination M.
Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.
Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.
On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les évènements :

A : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A ";
G : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G ";
M : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M ";
S : " le questionnaire est celui d'un client satisfait ";
$\bar{S}$: " le questionnaire est celui d'un client insatisfait ".

1/ Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
2/ a-Traduire par une phrase les évènements G $\cap$S et M $\cap$ S puis calculer les probabilités p(G $\cap$ S)   et p(M $\cap$ S) .

b- L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer p(A $\cap$ S).

c- En déduire $p_A(S)$, probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A est réalisé.

3/ Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).

4/ On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement : " les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits " (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

EXERCICE N°3 (4 points)

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près

Le tableau ci- dessous donne le PIB (le produit intérieur brut) de la chine en milliards de dollars, entre 1982 et 2002.

Année	1982	1986	1990	1994	1998	2002
Rang x_i de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB y_i	280	300	384	546	945	1232

1. Construire sur le graphique donné en annexe le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal du plan. *Les unités graphiques seront de 1cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées*.

2. a- Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de *y* en fonction de *x* obtenue par la méthode des moindres carrés.

b- Tracer cette droite sur le graphique.

c- Avec cet ajustement estimer le PIB de la chine en 2004.

3. On envisage dans cette question un ajustement exponentiel.

En posant $z = \ln(y)$ on obtient une droite d'ajustement de *z* en *x* d'équation $z = 0,08x + 5,46$

a- On se propose de déterminer alors *y* en fonction de *x* sous la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ où α et β sont des réels Montrer que $y = 235,10e^{0,08x}$

b- Tracer sur le graphique la courbe d'équation $y = 235,10e^{0,08x}$ pour $x \in [0,24]$

c- Avec cet ajustement estimer le PIB de la chine en 2004

4. Le PIB de la Chine pour 2004 était de 1650 milliards de dollars. Quel est l'ajustement le plus fiable?

EXERCICE N°4 (4 points)

A/ On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = 2xe^{x}$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$
2. Vérifier que la fonction $h: x \to x^2 e^{x}$ est une solution de (E)
3. a) Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E_0)

   b) Résoudre alors l'équation (E)

   c) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)e^{x}$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Tracer la courbe représentative ζ de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
3. Soit α un réel strictement négatif

   a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I_\alpha = \int_\alpha^0 x e^{x} dx$

   b) On désigne par $A(\alpha)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par ζ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 0$

   Sans utiliser une intégration par parties calculer $A(\alpha)$ puis déterminer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

EXERCICE N°5 (5 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

I/ 1) a- Interpréter graphiquement g(2)

b- Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2,5$

2) a- Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\int_2^x f(t)dt \geq x - 2$. En déduire que $g(x) \geq x - 2$

b- Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$

3) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$

II/ On admet que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$

1) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction de x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt$
2) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x(1 - e^{-x})$
3) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom: **Classe:**

EXERCICE N°1

Questions	1				2. a)				2. b)			
Propositions	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D

EXERCICE N° 3