

L.S.B.Amri	Devoir de synthèse N°1	SAI.Fethi
4 SC-Informatique	Mathématiques 2^H	6/12/2008

Exercice 1: (5 points)

1) Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0. \quad \text{et} \quad (E_2) : z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 2i, z_B = 1 + \sqrt{3} + i, z_C = 1 + \sqrt{3} - i \text{ et } z_D = 1 - 2i.$$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

3)

a) Montrer que le triangle ABD est rectangle en B.

b) Montrer que le triangle ACD est rectangle en C.

c) En déduire que les points A, B, C et D appartiennent au cercle

(C) de diamètre $[AD]$.

Exercice 2: (5 points)

Soit la suite réelle (u) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que la suite u est minorée par 3.

b) Montrer que la suite u est décroissante.

c) En déduire que la suite u est convergente.

d) Calculer la limite de la suite u.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 < \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Retrouver la limite de la suite u.

Exercice 3: (4 points) :

1) Montrer que l'équation : $65x - 40y = 1$ n'admet pas de solutions entiers.

2) Soit l'équation E : $17x - 40y = 1$.

a) Montrer que (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple (x_0, y_0)

solution de l'équation (E) .

c) Résoudre, alors, l'équation (E) .

3) En déduire qu'il existe un unique entier naturel n inférieur à 40 tel que : $17n \equiv 1(40)$

Exercice 4: (4 points) :

1)

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ?

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ?

2) En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et $6^{40} \equiv 1[5]$

3) Montrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55 .

Exercice 5: (2 points) :

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x$.

Bon Travail