

1 Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace

1. Définition

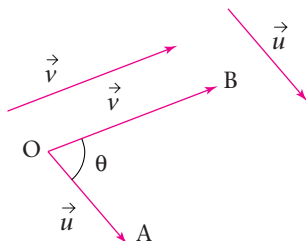
• Soit $\mathcal{E}$ le plan ou l'espace.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$, et trois points O, A et B tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{OB}.$$

On note θ l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$.



$$\text{Soit } \vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \theta.$$

Remarque : Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dépend du signe de $\cos \theta$:

$$(\theta \text{ aigu}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

$$(\theta \text{ obtus}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

$$(\theta \text{ droit}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

2. Conséquences

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\theta = 0$ donc $\cos \theta = 1$.

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\theta = \pi$ donc $\cos \theta = -1$.

• Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u})^2 = (\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$.

$(\vec{u})^2$ est appelé carré scalaire, c'est un nombre positif.

$\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; cette égalité traduit la symétrie du produit scalaire.

3. Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{E}$ et deux réels α et β :

$$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = (\alpha \beta) \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

4. Propriété fondamentale

Si on projette orthogonalement les vecteurs $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ sur la direction de $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}$ (les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

De même si on projette orthogonalement le vecteur $\vec{v}$ en $\vec{v}'$ sur la direction de $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{u}$.

Donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{u}$$

Exemple d'application

Démontrer que dans un triangle quelconque ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \widehat{ABC}.$$

Ce théorème est celui d'Al-Kashi (généralisation à un triangle quelconque du théorème de Pythagore).

Corrigé commenté

D'après la relation de Chasles, quels que soient les points A, B et C :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\text{d'où } (\vec{AC})^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = AB^2 + BC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}.$$

$$\text{Soit } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} \quad \text{d'où :}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos \widehat{ABC}.$$

2 Produit scalaire en géométrie analytique

Dans le plan	Dans l'espace
Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère ortho-normé du plan	Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère ortho-normé de l'espace
Représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$	
Passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$	Passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{v} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
Équations cartésiennes de $\mathcal{D}$	
$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \text{ avec } ab \neq 0$ soit $Ax + By + C = 0$	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ avec $abc \neq 0$
Produit scalaire	
des vecteurs $\vec{v}(x, y)$ et $\vec{v}'(x', y')$ $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'.$	des vecteurs $\vec{v}(x, y, z)$ et $\vec{v}'(x', y', z')$ $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'.$
Équation cartésienne et vecteur normal	
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A(x_0, y_0)$ et orthogonale à un vecteur $\vec{v}(a, b)$ $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ $ax + by + c = 0.$	Soit P un plan passant un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orthogonal à un vecteur $\vec{v}(a, b, c)$ $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ $ax + by + cz + d = 0.$
Distance d'un point B	
$B(x_1, y_1)$ à une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ $d(B, (\mathcal{D})) = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}.$	$B(x_1, y_1, z_1)$ à un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ $d(B, (P)) = \frac{ ax_1 + by_1 + cz_1 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Cercle

Équation d'un cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
 soit $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
 avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Sphère

Équation d'une sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon R
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
 soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
 avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Équation paramétrique d'un plan P contenant $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{v}(a, b, c)$ et $\vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$ non colinéaires.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}_1 \text{ avec } \lambda \mu \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a_1 \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b_1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Remarque : Si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes de deux plans P et P' sécants, alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une représentation de leur droite d'intersection dans l'espace.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d < 0$ est le demi-espace ouvert de frontière le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et contenant le point O si $d < 0$.

Exemple d'application

Soit les points $A(0 ; 6)$ et $B(-2 ; 10)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer la distance du point $C(4 ; -3)$ à la droite (AB) .

Corrigé commenté

Conseil : On rappelle que les vecteurs $\vec{u}(X, Y)$ et $\vec{v}(X', Y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $XY' - X'Y = 0$.

$N(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AN}(x ; y-6)$ et $\overrightarrow{AB}(-2 ; 4)$.

$N(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow 4x - (-2)(y-6) = 0$ soit

$4x + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

$$d(C, (AB)) = \frac{|2 \times 4 - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} \text{ soit } d(C, (AB)) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3 Barycentres dans l'espace et caractérisations barycentriques

1. Définition du barycentre de n points pondérés

Soit les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de pondérations respectives $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Ce point est appelé barycentre des n points pondérés.

2. Propriétés

- On ne change pas le barycentre de n points en multipliant les pondérations par un même nombre non nul.
- On ne change pas le barycentre de n points pondérés, en remplaçant p de ces points ($p \leq n$) par leur barycentre, s'il existe, affecté de la somme des leurs pondérations (théorème du barycentre partiel).
- Coordonnées du barycentre dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Un point A_i a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) et pour pondération a_i .

Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, soit $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre des n points pondérés alors :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\sum_{i=1}^n a_i},$$

3. Caractérisations barycentriques

- La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$.
- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha\beta > 0$.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
- La surface intérieure au triangle ABC est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

Exemples d'application

❶ Soit un tétraèdre ABCD et C' le symétrique de C par rapport à A et G le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 4); (C, -1); (D, 3)\}$. Les points G, B, C' et D sont-ils coplanaires ?

Corrigé commenté

Indication : La coplanéarité des points G, B, C' et D revient à démontrer que l'un d'entre eux est barycentre des trois autres points pondérés.

Le point C' est le symétrique de C par rapport à A ce qui signifie que $\overrightarrow{2C'A} = \overrightarrow{C'C}$ donc C' est le barycentre des points (A, 2) et (C, -1).

Par associativité, le point G est alors le barycentre des points (C', 1), (B, 4) et (D, 3), on en déduit donc que les points G, B, C' et D sont coplanaires.

❷ Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Montrer que le point A est barycentre des points B, C, D affectés de coefficients que l'on déterminera.

Corrigé commenté

En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :

$$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\text{soit } -2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Or, $-2 - 3 + 6 \neq 0$, donc :

A est le barycentre du système $\{(B, -2); (C, -3); (D, 6)\}$.

4 Positions relatives dans l'espace

On considère un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Intersection de deux plans

Soit deux plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et le plan P' a pour vecteur normal $\vec{n}'(a', b', c')$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, alors les plans P et P' sont parallèles.

Remarque : Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\vec{n}' = k\vec{n}$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' sont sécants selon une droite.

2. Intersection d'une droite et d'un plan

Soit une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{v}$ et un plan P défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- Si $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont coplanaires, alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan P .
- Si $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas coplanaires, alors la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan en un point.

Si $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$$

et si P a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors $\mathcal{D}$ et P ont un point commun si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) + d = 0.$$

3. Intersection de trois plans

- Les plans P , P' et P'' peuvent être sécants deux à deux et n'avoir aucun point commun et alors le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{n'a aucune solution.}$$

- Si les trois plans sont strictement parallèles, alors le système (S) n'a aucune solution.
- Si les trois plans sont sécants selon une droite, alors le système (S) admet une infinité de solutions. Ces solutions sont les triplets de coordonnées des points de la droite d'intersection.
- Si les trois plans sont sécants selon un point, alors le système (S) admet une seule solution. Cette solution est le triplet de coordonnées du point commun à ces trois plans.

Exemple d'application

Déterminer les positions relatives des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 3t + 5 \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' + 4 \\ y = -t' + 1 \\ z = 2t' - 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Corrigé commenté

Les vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont $\vec{u}(-2; 3; 0)$ et $\vec{u}'(1; -1; 2)$; les coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Si ces droites sont sécantes, alors il existe un couple (t, t') vérifiant les deux représentations paramétriques.

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} -2t + 3 = t' + 4 \\ 3t + 5 = -t' + 1 \\ 4 = 2t' - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{4} \\ t = -\frac{13}{6} \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Les résultats ne sont pas compatibles, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, n'ont pas de point commun, donc elles ne sont pas coplanaires.