

1 Définition et représentation graphique de la fonction logarithme népérien

1. Définition

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie, continue sur $]0 ; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est la primitive, définie sur $]0 ; +\infty[$, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

2. Conséquences

- La fonction logarithme népérien, dont la dérivée est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$, est strictement croissante. Elle est continue et bijective.

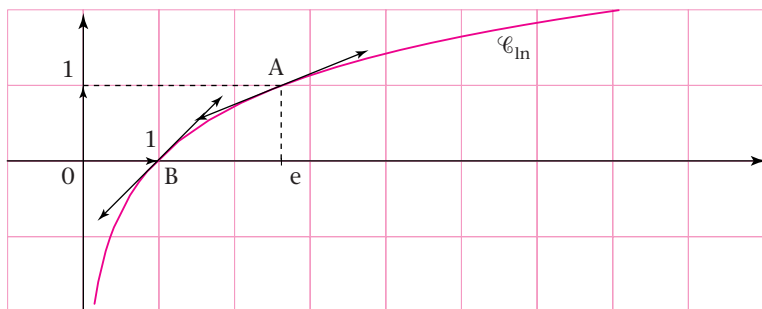
$$\bullet \ln'(x) = \frac{1}{x};$$

$$\ln 1 = 0.$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$			
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$



- On appelle e le nombre réel tel que $\ln e = 1$.

Au point $A(e; 1)$, la tangente a pour équation $y = \frac{1}{e}x$ et au point $B(1; 0)$ la tangente a pour coefficient directeur 1.

Exemple d'application

Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right).$$

Corrigé commenté

Indication : on commence par déterminer l'ensemble D de définition de la fonction f .

$f(x)$ existe si, et seulement si, $\frac{x+3}{x-1} > 0$; le signe de ce quotient est celui d'un trinôme du second degré de racines 1 et -3 .

Par suite, $\frac{x+3}{x-1} > 0$ si, et seulement si, $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

Donc $D =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

Indication : on étudie ensuite les limites de f aux bornes de D .

$$\bullet \frac{x+3}{x-1} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \text{ pour } x \neq 0 \text{ d'où } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ donc par}$$

composition $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ dans un voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ < -3}} \frac{x+3}{x-1} = 0^+ \text{ et } \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ > 0}} \ln X = -\infty, \text{ donc par composition } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ < -3}} f(x) = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} (x-1) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4 \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} \left(\frac{x+3}{x-1} \right) = +\infty \text{ et}$$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à D .

En définitive, il y a 3 asymptotes d'équations respectives :

$$y = 0; x = -3 \text{ et } x = 1.$$

2 Propriétés et autres fonctions

1. Propriétés de la fonction logarithme népérien

Conditions	Propriétés
$a > 0$ $b > 0$	$\ln ab = \ln a + \ln b$ (propriété caractéristique des fonctions logarithmes) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (fonction « $\ln$ » bijective) $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (fonction « $\ln$ » strictement croissante) $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$; $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
$0 < x < 1$	$\ln x < 0$
$x > 1$	$\ln x > 0$

2. Dérivées et primitives

• Soit une fonction u , définie et dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout x de I , $u(x)$ soit strictement positif :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u} \quad . \quad \text{Si } u(x) \neq 0 \quad (\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

• Soit une fonction u telle que $u(x) \neq 0$ sur un intervalle I dont la dérivée u' est dérivable sur I .

Les primitives sur I de $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions $\ln |u| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Cette fonction a la même variation et les mêmes propriétés opératoires que la fonction logarithme népérien.

$$\log 1 = 0 ; \quad \log 10 = 1 ; \quad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Cette fonction est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir des puissances de 10.

4. Autres limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad (\text{à redémontrer à chaque fois}).$$

$\ln(1+h) \approx h$ au voisinage de zéro.

5. Résolution de l'équation $\ln x = a$

Pour chaque réel a , l'équation $\ln x = a$ admet une solution unique dans $]0 ; +\infty[$.

Cette solution est e^a et se lit exponentielle de a ou e exposant a .

Exemple d'application

Soit la fonction $f: x \mapsto \ln \frac{x^2+3}{x-1}$ définie sur $]1 ; +\infty[$.

Déterminer les variations de f .

Corrigé commenté

La fonction f est telle que $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

$$\text{D'où } f' = \frac{u'}{u} \text{ avec } u'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+3}{x-1}} = \frac{(x^2-2x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+3)}.$$

Or sur $]1 ; +\infty[$; $x-1 > 0$; $(x-1)^2 > 0$ et $x^2+3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme x^2-2x-3 dont les racines sont -1 et 3 .

Par suite $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in]3 ; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in]1 ; 3]$.

Or $f'(3) = 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]3 ; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1 ; 3]$.

Remarque : ne pas oublier que f n'est définie que sur un ensemble contenu dans D_f . Dans ce cas, $D_{f'} = D_f =]1 ; +\infty[$.